

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«КАРАЧАЕВО-ЧЕРКЕССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ У.Д. АЛИЕВА»

Физико-математический факультет

Кафедра алгебры и геометрии

УТВЕРЖДАЮ
И. о. проректора по УР
М. Х. Чанкаев
«30» апреля 2025г., протокол № 8

Рабочая программа дисциплины

Дифференциальная геометрия

(наименование дисциплины (модуля))

Направление подготовки:

44.04.01 Педагогическое образование

(шифр, название направления)

Направленность (профиль) программы:

Математическое образование

Квалификация выпускника

магистр

Форма обучения

Заочная, очно – заочная

Год начала подготовки - 2025

(по учебному плану)

Карачаевск, 2025

Составитель: *ст. преподаватель кафедры алгебры и геометрии Боташева З. Х.*

Рабочая программа дисциплины составлена в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования по направлению подготовки 44.04.01 Педагогическое образование, направленность (профиль) программы: «Математическое образование», утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 22.02.2018, № 126, учебным планом, основной профессиональной образовательной программой высшего образования по направлению подготовки 44.04.01 Педагогическое образование, направленность (профиль) программы: «Математическое образование», локальными актами КЧГУ.

Рабочая программа рассмотрена и утверждена на заседании кафедры алгебры и геометрии на 2025-2026 учебный год, протокол №8 от 10 апреля 2025г.

Оглавление

1. Наименование дисциплины (модуля).....	4
2. Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы	4
3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы.....	4
4. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся.....	5
5. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий.....	6
5.1. Для очно-заочной формы.....	6
5.2. Для заочной формы	7
6. Образовательные технологии.....	8
7. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине (модулю).....	11
7.1. Описание шкал оценивания степени сформированности компетенций	11
7.2. Перевод балльно-рейтинговых показателей оценки качества подготовки обучающихся в отметки традиционной системы оценивания.....	12
7.3. Типовые контрольные вопросы и задания, необходимые для оценивания	12
сформированности компетенций в процессе освоения учебной дисциплины	12
7.3.1. Перечень вопросов для зачета	12
7.3.2. Тестовый материал для диагностики индикаторов оценивания	12
сформированности компетенций.....	12
7.3.3. Оценочные материалы. Варианты контрольных работ	12
8.Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля).....	15
9. Требования к условиям (модуля реализации рабочей программы дисциплины)	16
9.1. Общесистемные требования.....	16
9.2. Материально-техническое и учебно-методическое обеспечение дисциплины	17
9.3. Необходимый комплект лицензионного программного обеспечения	17
9.4. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы.....	17
10. Особенности организации образовательного процесса для лиц с ограниченными возможностями здоровья	17
11. Лист регистрации изменений	18

1. Наименование дисциплины (модуля)

Дифференциальная геометрия

Целью изучения дисциплины является:

теоретическое освоение обучающимися основных разделов дифференциальной геометрии, необходимых для понимания роли математики в профессиональной деятельности; формирования культуры мышления, способности к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей её достижения; освоения основных методов дифференциальной геометрии и топологии, применяемых в решении профессиональных задач и научно-исследовательской деятельности.

Для достижения цели ставятся задачи:

получить представление о роли дифференциальной геометрии в профессиональной деятельности; изучить необходимый понятийный аппарат дисциплины; сформировать умения доказывать геометрические теоремы; сформировать умения решать типовые задачи основных разделов дифференциальной геометрии; формирование систематизированных знаний в области дифференциальной геометрии и ее методов, необходимых для дальнейшего самостоятельного освоения научной информации.

2. Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Данная дисциплина (модуль) относится к части блока Б1 учебного плана, формируемой участниками образовательных отношений.

Дисциплина (модуль) изучается на 1 курсе, в первом семестре.

МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОП ВО	
Индекс	Б1.В.05
Требования к предварительной подготовке обучающегося:	
Для успешного освоения дисциплины студент должен иметь базовую подготовку по элементарной математике в объеме программы средней школы, должен изучить дисциплины: алгебру, геометрию, математический анализ.	
Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:	
Дисциплина (модуль) "Дифференциальная геометрия" является необходимой для изучения дисциплин профессионального цикла и практик, формирующих компетенцию ПК-4.	

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

В результате освоения ОП ВО обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения по дисциплине (модулю):

Коды компетенций	Содержание компетенций*	Код и наименование индикатора достижения компетенции

ПК-4	Способен проводить исследования в предметной области научного знания и в сфере образования, разрабатывать инновационные механизмы и инструментарий для решения научных задач	<p>ПК-4.1. Знает особенности проведения исследований в области математики и математического образования</p> <p>ПК-4.2. Умеет решать исследовательские задачи с учётом содержательного и организационного контекстов</p> <p>ПК-4.3. Владеет навыками разработки алгоритмов и способов достижения проектируемых уровней своего профессионального и личностного роста</p>
------	--	--

4. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Общая трудоемкость (объем) дисциплины (модуля) составляет 3 ЗЕТ, 108 академических часа.

Объём дисциплины	Всего часов	
	для очно-заочной формы	для заочной формы обучения
Общая трудоемкость дисциплины	108	108
Контактная работа обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) * (всего)		
Аудиторная работа (всего):	18	8
в том числе:		
лекции	-	-
семинары, практические занятия	18	8
практикумы	-	-
лабораторные работы	-	-
Внеаудиторная работа:		
курсовые работы	-	-
консультация перед экзаменом	-	-
Внеаудиторная работа также включает индивидуальную работу обучающихся с преподавателем, групповые, индивидуальные консультации и иные виды учебной деятельности, предусматривающие групповую или индивидуальную работу обучающихся с преподавателем, рефераты, контрольные работы и др.		
Самостоятельная работа обучающихся (всего)	90	96
Контроль самостоятельной работы	-	4
Вид промежуточной аттестации обучающегося (зачет / экзамен)	Зачет на 1 курсе, семестр 1	Зачет -1 курс, вторая сессия

5. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

5.1. Для очно-заочной формы

№ п/п	Курс / се- мест р	Раздел, тема дисциплины	Общая трудоем- кость (в часах)	Виды учебных занятий, включая самостоятель- ную работу обучающих- ся и трудоемкость(в ча- сах)				
				всего	Аудиторные уч. занятия			
					Лек	Пр	Лаб	Сам. работа
	1/1		108	-	18	-	90	
	1/1	РАЗДЕЛ 1. ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТОПОЛОГИИ	24	-	4	-	20	
1	1/1	Понятие топологического пространства, примеры топологических пространств. Метрические пространства	10	-	2	-	8	
2	1/1	Непрерывные отображения и гомеоморфизмы топологических пространств	8	-	2	-	6	
3	1/1	Компактность и связность топологических и метрических пространств	6	-		-	6	
	1/1	РАЗДЕЛ 2. ГЛАДКИЕ КРИВЫЕ	16	-	2	-	14	
4	1/1	Плоские и пространственные кривые. Примеры. Способы их задания. Репер Френе	6	-		-	6	
5	1/1	Кривизна и кручение кривой, формулы. Натуральные уравнения кривой	10	-	2	-	8	
	1/1	РАЗДЕЛ 3. ГЛАДКИЕ ПОВЕРХНОСТИ	28	-	4	-	24	
6	1/1	Определение и способы задания поверхности и гладкой поверхности. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.	6	-	-	-	6	
7	1/1	Первая квадратичная форма и ее роль, метрика поверхности	8	-	2	-	6	
8	1/1	Вторая квадратичная форма. Кривизна линии на поверхности	8	-	2	-	6	
9	1/1	Главные кривизны поверхности. Полная (гауссова) и средняя кривизны поверхности	6	-	-	-	6	
	1/1	РАЗДЕЛ 4. ГЛАДКИЕ МНОГООБРАЗИЯ	40	-	8	-	32	
10	1/1	Определение гладкого многообразия. Примеры. Многообразия с краем	8	-	2	-	6	
11	1/1	Отображения многообразий	6	-	2	-	4	
12	1/1	Риманова метрика, касательный вектор и касательное пространство к многообразию	6	-	2	-	4	

13	1/1	Векторные поля на многообразии. Теорема Гаусса-Бонне	6	-	2	-	4
14	1/1	Индекс особой точки векторного поля. Теорема Пуанкаре-Бендиксона	6	-	-	-	6
15	1/1	Интеграл дифференциальной формы. Общая формула Стокса и ее частные случаи (формулы Грина, Стокса, Остроградского-Гаусса).	8	-	-	-	8
	1/1	ВСЕГО	108	-	18	-	90

5.2. Для заочной формы

№ п/п	Курс / се- мест р	Раздел, тема дисциплины	Общая трудо- емкость (в часах)	Виды учебных занятий, включая самостоятель- ную работу обучающих- ся и трудоемкость(в ча- сах)			Сам. работа
				всего	Аудиторные уч. занятия		
	1/1		108	-	8	-	96
	1/1	РАЗДЕЛ 1. ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТОПОЛОГИИ	20	-	-	-	20
1	1/1	Понятие топологического пространства, примеры топологических пространств. Метрические пространства	8	-	-	-	8
2	1/1	Непрерывные отображения и гомеоморфизмы топологических пространств	6	-	-	-	6
3	1/1	Компактность и связность топологических и метрических пространств	6	-	-	-	6
	1/1	РАЗДЕЛ 2. ГЛАДКИЕ КРИВЫЕ	18	-	2	-	16
4	1/1	Плоские и пространственные кривые. Примеры. Способы их задания. Репер Френе	8	-	-	-	8
5	1/1	Кривизна и кручение кривой, формулы. Натуральные уравнения кривой	10	-	2	-	8
	1/1	РАЗДЕЛ 3. ГЛАДКИЕ ПОВЕРХНОСТИ	26	-	4	-	22
6	1/1	Определение и способы задания по- верхности и гладкой поверхности. Ка- сательная плоскость и нормаль к по- верхности.	6	-	-	-	6
7	1/1	Первая квадратичная форма и ее роль, метрика поверхности	8	-	2	-	6
8	1/1	Вторая квадратичная форма. Кривизна линии на поверхности	8	-	2	-	6
9	1/1	Главные кривизны поверхности. Полная (гаус- сова) и средняя кривизны поверхности	4	-	-	-	4
	1/1	РАЗДЕЛ 4. ГЛАДКИЕ МНОГООБРАЗИЯ	40	-	2	-	38
10	1/1	Определение гладкого многообразия.	8	-	2	-	6

		Примеры. Многообразия с краем					
11	1/1	Отображения многообразий	6	-	-	-	6
12	1/1	Риманова метрика, касательный вектор и касательное пространство к многообразию	6	-	-	-	6
13	1/1	Векторные поля на многообразии. Теорема Гаусса-Бонне	6	-	-	-	6
14	1/1	Индекс особой точки векторного поля. Теорема Пуанкаре-Бендиксона	6	-	-	-	6
15	1/1	Интеграл дифференциальной формы. Общая формула Стокса и ее частные случаи (формулы Грина, Стокса, Остроградского-Гаусса).	8	-	-	-	8
14	1/1	Контроль самостоятельной работы	4	-	-	-	-
	1/1	ВСЕГО	108	-	8	-	96

6. Образовательные технологии

При проведении учебных занятий по дисциплине используются традиционные и инновационные, в том числе информационные образовательные технологии, включая при необходимости применение активных и интерактивных методов обучения.

Традиционные образовательные технологии реализуются, преимущественно, в процессе лекционных и практических занятий. Инновационные образовательные технологии используются в процессе аудиторных занятий и самостоятельной работы студентов в виде применения активных и интерактивных методов обучения.

Информационные образовательные технологии реализуются в процессе использования электронно-библиотечных систем, электронных образовательных ресурсов и элементов электронного обучения в электронной информационно-образовательной среде для активизации учебного процесса и самостоятельной работы студентов.

Лекционные занятия. Лекция является основной формой учебной работы в вузе, она является наиболее важным средством теоретической подготовки обучающихся. На лекциях рекомендуется деятельность обучающегося в форме активного слушания, т.е. предполагается возможность задавать вопросы на уточнение понимания темы и рекомендуется конспектирование основных положений лекции. Основная дидактическая цель лекции - обеспечение ориентированной основы для дальнейшего усвоения учебного материала. Лекторами активно используются: лекция-диалог, лекция - визуализация, лекция - презентация. Лекция - беседа, или «диалог с аудиторией», представляет собой непосредственный контакт преподавателя с аудиторией. Ее преимущество состоит в том, что она позволяет привлекать внимание слушателей к наиболее важным вопросам темы, определять содержание и темп изложения учебного материала с учетом особенностей аудитории. Участие обучающихся в лекции – беседе обеспечивается вопросами к аудитории, которые могут быть как элементарными, так и проблемными.

Главной задачей каждой лекции является раскрытие сущности темы и анализ ее основных положений. Рекомендуется на первой лекции довести до внимания студентов структуру дисциплины и его разделы, а в дальнейшем указывать начало каждого раздела (модуля), суть и его задачи, а, закончив изложение, подводить итог по этому разделу, чтобы связать его со следующим. Содержание лекций определяется настоящей рабочей про-

граммой дисциплины. Для эффективного проведения лекционного занятия рекомендуется соблюдать последовательность ее основных этапов:

1. формулировку темы лекции;
2. указание основных изучаемых разделов или вопросов и предполагаемых затрат времени на их изложение;
3. изложение вводной части;
4. изложение основной части лекции;
5. краткие выводы по каждому из вопросов;
6. заключение;
7. рекомендации литературных источников по излагаемым вопросам.

Практические занятия. Дисциплины, по которым планируются практические занятия, определяются учебными планами. Практические занятия относятся к основным видам учебных занятий и составляют важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки. Выполнение студентом практических занятий направлено на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление полученных теоретических знаний по конкретным темам дисциплин математического и общего естественно-научного, общепрофессионального и профессионального циклов;
- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- развитие интеллектуальных умений у будущих специалистов: аналитических, проектировочных, конструктивных и др.;
- выработку при решении поставленных задач таких профессионально значимых качеств, как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива. Методические рекомендации разработаны с целью единого подхода к организации и проведению практических занятий.

Практическое занятие — это форма организации учебного процесса, направленная на выработку у студентов практических умений для изучения последующих дисциплин (модулей) и для решения профессиональных задач. Практическое занятие должно проводиться в учебных кабинетах или специально оборудованных помещениях. Необходимыми структурными элементами практического занятия, помимо самостоятельной деятельности студентов, являются анализ и оценка выполненных работ и степени овладения студентами запланированными умениями. Дидактические цели практических занятий: формирование умений (аналитических, проектировочных, конструктивных), необходимых для изучения последующих дисциплин (модулей) и для будущей профессиональной деятельности.

В процессе подготовки к практическим занятиям, обучающимся необходимо обратить особое внимание на самостоятельное изучение рекомендованной учебно-методической (а также научной и популярной) литературы. Самостоятельная работа с учебниками, учебными пособиями, научной, справочной и популярной литературой, материалами периодических изданий и Интернета, статистическими данными является наиболее эффективным методом получения знаний, позволяет значительно активизировать процесс овладения информацией, способствует более глубокому усвоению изучаемого материала, формирует у обучающихся свое отношение к конкретной проблеме. Более глубокому раскрытию вопросов способствует знакомство с дополнительной литературой, рекомендованной преподавателем по каждой теме семинарского или практического занятия, что позволяет обучающимся проявить свою индивидуальность в рамках выступления на данных занятиях, выявить широкий спектр мнений по изучаемой проблеме.

Образовательные технологии. При проведении учебных занятий по дисциплине используются традиционные и инновационные, в том числе информационные образовательные технологии, включая при необходимости применение активных и интерактивных методов обучения.

Традиционные образовательные технологии реализуются, преимущественно, в процессе лекционных и практических занятий. Инновационные образовательные технологии используются в процессе аудиторных занятий и самостоятельной работы студентов в виде применения активных и интерактивных методов обучения. Информационные образовательные технологии реализуются в процессе использования электронно-библиотечных систем, электронных образовательных ресурсов и элементов электронного обучения в электронной информационно-образовательной среде для активизации учебного процесса и самостоятельной работы студентов.

Практические занятия могут проводиться в форме групповой дискуссии, «мозговой атаки», разборка кейсов, решения практических задач, публичная презентация проекта и др. Прежде, чем дать группе информацию, важно подготовить участников, активизировать их ментальные процессы, включить их внимание, развивать кооперацию и сотрудничество при принятии решений.

Методические рекомендации по проведению различных видов практических (семинарских) занятий.

1.Обсуждение в группах

Групповое обсуждение какого-либо вопроса направлено на нахождении истины или достижение лучшего взаимопонимания, Групповые обсуждения способствуют лучшему усвоению изучаемого материала.

На первом этапе группового обсуждения перед обучающимися ставится проблема, выделяется определенное время, в течение которого обучающиеся должны подготовить аргументированный развернутый ответ.

Преподаватель может устанавливать определенные правила проведения группового обсуждения:

- задавать определенные рамки обсуждения (например, указать не менее 5.... 10 ошибок);
- ввести алгоритм выработки общего мнения (решения);
- назначить модератора (ведущего), руководящего ходом группового обсуждения.

На втором этапе группового обсуждения вырабатывается групповое решение совместно с преподавателем (арбитром).

Разновидностью группового обсуждения является круглый стол, который проводится с целью поделиться проблемами, собственным видением вопроса, познакомиться с опытом, достижениями.

2.Публичная презентация проекта

Презентация – самый эффективный способ донесения важной информации как в разговоре «один на один», так и при публичных выступлениях. Слайд-презентации с использованием мультимедийного оборудования позволяют эффективно и наглядно представить содержание изучаемого материала, выделить и проиллюстрировать сообщение, которое несет поучительную информацию, показать ее ключевые содержательные пункты. Использование интерактивных элементов позволяет усилить эффективность публичных выступлений.

3.Дискуссия

Как интерактивный метод, коллективное обсуждение конкретной разбор. Образовательной дискуссией называется проблемы (ситуации), сопровождающейся обменом идея-

ми, опытом, суждениями, обучения означает исследование или целенаправленное мнениями в составе группы обучающихся.

Как правило, дискуссия обычно проходит три стадии: ориентация, оценка и консолидация. Последовательное рассмотрение каждой стадии позволяет выделить следующие их особенности.

Стадия ориентации предполагает адаптацию участников дискуссии к самой проблеме, друг другу, что позволяет сформулировать проблему, цели дискуссии; установить правила, регламент дискуссии.

В стадии оценки происходит выступление участников дискуссии, их ответы на возникающие вопросы, сбор максимального объема идей (знаний), предложений, пресечение преподавателем (арбитром) личных амбиций отклонений от темы дискуссии.

Стадия консолидации заключается в анализе результатов дискуссии, согласовании мнений и позиций, совместном формулировании решений и их принятия.

В зависимости от целей и задач занятия, возможно, использовать следующие виды дискуссий: классические дебаты, экспресс-дискуссия, проблемная дискуссия, ролевая (ситуационная) дискуссия.

7. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине (модулю)

7.1. Описание шкал оценивания степени сформированности компетенций

Компетенции	Зачтено			Не засчитано
	Высокий уровень (отлично) (86-100% баллов)	Средний уровень (хорошо) (71-85% баллов)	Низкий уровень (удовлетворительно) (56-70% баллов)	Ниже порогового уровня (неудовлетворительно) (до 55% баллов)
ПК-4 Способен проводить исследования в предметной области научного знания и в сфере образования, разрабатывать инновационные механизмы и инструментарий для решения научных задач	<p>ПК-4.1. Знает в полном объеме особенности проведения исследований в области математики и математического образования</p> <p>ПК-4.2. Умеет решать в полном объеме исследовательские задачи с учётом содержательного и организационного контекстов</p> <p>ПК-4.3. В полном объеме владеет навыками разработки алгоритмов и способов достижения проектируемых уровней своего профессионального и личностного роста</p>	<p>ПК-4.1. Знает особенности проведения исследований в области математики и математического образования</p> <p>ПК-4.2. Умеет решать исследовательские задачи с учётом содержательного и организационного контекстов</p> <p>ПК-4.3. Владеет навыками разработки алгоритмов и способов достижения проектируемых уровней своего профессионального и личностного роста</p>	<p>ПК-4.1. Знает в целом особенности проведения исследований в области математики и математического образования</p> <p>ПК-4.2. В целом умеет решать исследовательские задачи с учётом содержательного и организационного контекстов</p> <p>ПК-4.3. Владеет в целом навыками разработки алгоритмов и способов достижения проектируемых уровней своего профессионального и личностного роста</p>	<p>ПК-4.1. Не знает особенности проведения исследований в области математики и математического образования</p> <p>ПК-4.2. Не умеет решать исследовательские задачи с учётом содержательного и организационного контекстов</p> <p>ПК-4.3. Не владеет навыками разработки алгоритмов и способов достижения проектируемых уровней своего профессионального и личностного роста</p>

7.2. Перевод балльно-рейтинговых показателей оценки качества подготовки обучающихся в отметки традиционной системы оценивания

Порядок функционирования внутренней системы оценки качества подготовки обучающихся и перевод балльно-рейтинговых показателей обучающихся в отметки традиционной системы оценивания проводится в соответствии с положением КЧГУ «Положение о балльно-рейтинговой системе оценки знаний обучающихся», размещенным на сайте Университета по адресу: <https://kchgu.ru/inye-lokalnye-akty/>

7.3. Типовые контрольные вопросы и задания, необходимые для оценивания сформированности компетенций в процессе освоения учебной дисциплины

7.3.1. Перечень вопросов для зачета

1. Понятие топологического пространства, примеры топологических пространств.
2. Понятие метрического пространства
3. Непрерывные отображения топологических пространств
4. Гомеоморфизм топологических пространств. Примеры.
5. Компактность и связность топологических и метрических пространств
6. Плоские и пространственные кривые. Примеры.
7. Репер Френе.
8. Кривизна и кручение кривой, формулы.
9. Натуральные уравнения кривой.
10. Определение и способы задания поверхности и гладкой поверхности.
· Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
12. Первая квадратичная форма и ее роль.
13. Вторая квадратичная форма.
14. Кривизна линии на поверхности
15. Главные кривизны поверхности. Полная (гауссова) и средняя кривизны поверхности
16. Определение гладкого многообразия.
17. Примеры. Многообразия с краем.
18. Отображения многообразий
19. Касательный вектор и касательное пространство к многообразию
20. Векторные поля на многообразии.
21. Теорема Гаусса-Бонне.
22. Индекс особой точки векторного поля.
23. Теорема Пуанкаре-Бендиксона
24. Интеграл дифференциальной формы. Общая формула Стокса
25. Формулы Грина, Стокса, Остроградского-Гаусса.

7.3.2. Тестовый материал для диагностики индикаторов оценивания сформированности компетенций

7.3.3. Оценочные материалы. Варианты контрольных работ

Типовые задания к контрольным работам:

Задание 1.

Задача 1. Рассмотрим множество R , состоящее из двух точек a и b . Открытыми будем считать множество R , пустое множество \emptyset и точку a . Показать, что R – топологическое пространство.

Решение.

Прежде всего, вспомним определение топологического пространства. Будем говорить, что множество R элементов произвольной природы образует топологическое пространство, если в нем можно выделить некоторое семейство (обозначим его $\tau = \{G_\alpha\}$) подмножества множества R , называемых открытыми множествами, если эти множества удовлетворяют следующим условиям (они называются аксиомами топологического пространства):

1. Объединение любого числа элементов из τ принадлежит τ .
2. Пересечение любого конечного числа множеств из τ принадлежит τ .
3. Пустое множество \emptyset принадлежит τ .
4. Само множество R принадлежит τ .

Часто семейство τ открытых множеств называют топологией в R .

Заметим, что две аксиомы (3 и 4) выполняются по условию нашей задачи автоматически.

Рассмотрим объединение всех трех заданных открытых множеств, получим множество R , а оно открыто (выполнение аксиомы 1).

Теперь рассмотрим различные конечные (они и не могут быть бесконечными, так как множество R само конечно) пересечения открытых: $R \cap \emptyset = \emptyset$, $R \cap a = a$, $a \cap \emptyset = \emptyset$ - это пересечения по два множества, пересечение всех трех: $R \cap \emptyset \cap a = \emptyset$. Таким образом, все получившиеся 4 множества принадлежат к открытым (выполнение аксиомы 2). Это означает, что все 4 аксиомы топологического пространства выполнены. Следовательно, R – топологическое пространство.

Конец решения.

Задача 2. Пусть R – это обычное трехмерное точечно-аффинное евклидово пространство. Тогда оно становится метрическим, если расстояние между точками приравнять длине вектора, соединяющего эти точки. А длина вектора, как известно, есть корень квадратный из скалярного квадрата вектора. Рассмотрим R как пространство с *естественной* (т. е. базу топологии составляют открытые шары) топологией, описанной в конспекте лекций.

Доказать, что произвольный отрезок $[A, B]$ замкнут в этом пространстве.

Решение. Нам необходимо доказать, что дополнение к отрезку открыто. Воспользуемся для доказательства этого факта теоремой о том, что *открытое множество состоит только из внутренних точек*.

Возьмем произвольную точку C , не принадлежащую прямой AB . Радиус шара с центром в точке C выберем равным половине расстояния от точки C до прямой AB . Тогда эта окружность не пересекает не только отрезок $[A, B]$, но и всю прямую AB .

Пусть теперь C принадлежит прямой AB , но не отрезку $[A, B]$. Допустим, что точка C расположена ближе к A (аналогично можно рассмотреть случай, когда C расположена ближе к B). Тогда радиус шара с центром в точке C возьмем равным половине расстояния от точки C до точки A . Очевидно, что шар не будет пересекать отрезок $[A, B]$.

Таким образом, всегда можно построить шар с центром в точке C , не имеющий общих точек с отрезком $[A, B]$. Значит, каждая точка $C \notin [A, B]$, т. е. $C \in R / [A, B]$ является внутренней для $R / [A, B]$. Следовательно $R / [A, B]$ является открытым множеством. Тогда по определению $[A, B]$ является замкнутым множеством. ■

Конец решения.

1. Выяснить, какие множества будут замкнутыми в задаче 1?
2. Определить в условиях задачи 2, какие из множеств являются замкнутыми:
 - а) открытый луч;
 - б) открытое полупространство;

в) множество всех точек некоторой прямой;

г) множество всех точек сферы.

Задание 2.

Определение. Скажем, что система кривых $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ производит клеточное разбиение поверхности S , если выполнены условия:

а) каждая из кривых γ_i ($i = 1, 2, \dots, k$) гомеоморфна замкнутому отрезку;

б) общими точками двух различных кривых γ_1 и γ_2 могут быть только их концы;

в) из каждого конца кривой γ_i исходит по меньшей мере еще одна кривая γ_j ($i \neq j$);

г) кривые $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ разбивают поверхность S на клетки G_1, G_2, \dots, G_n ; каждая клетка G_i гомеоморфна открытому кругу; две клетки G_i и G_j , $i \neq j$ не имеют общих точек; граница каждой клетки состоит из нескольких кривых;

д) каждая из кривых служит частью границы двух и только двух клеток;

е) $S = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_n \cup \gamma_1 \cup \gamma_2 \dots \cup \gamma_k$.

Тогда кривые $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ называются ребрами клеточного разбиения, их концы - вершинами.

Число $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$, где $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ - соответственно число вершин, ребер, клеток некоторого клеточного разбиения поверхности, называется эйлеровой характеристикой.

Образцы решений

Задача. Найти эйлерову характеристику сферы.

Решение.

Выколем из сферы одну точку - это будет единственная вершина. Тогда оставшаяся часть сферы гомеоморфна кругу (стереографическая проекция - см. конспект лекций), т. е. имеем ровно одну клетку. Получили: $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1$. Тогда эйлерова характеристика сферы равна $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 1 - 0 + 1 = 2$.

Конец решения.

Найти эйлерову характеристику:

а) тора;

б) кренделя с двумя отверстиями.

Задание 3.

Задача 1. Доказать, что любые два интервала (a, b) и (c, d) гомеоморфны.

Решение. Гомеоморфизм между интервалами устанавливается, например, линейной функцией

$$y = \frac{d - c}{b - a} (x - a) + c.$$

Известно, что линейная функция биективна и непрерывна, причем в обе стороны, так как обратная функция также является линейной.

Конец решения.

Задача 2. Доказать, что интервал (a, b) и числовая ось \mathbb{R} гомеоморфны.

Решение. Гомеоморфизм между ними устанавливается, например, функцией

$$y = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi(x - a)}{b - a} - \frac{\pi}{2} \right),$$

представляющей собой композицию функции тангенс и линейной функции. Каждая из них обратима и непрерывна, также и обратные - арктангенс и линейная - непрерывны.

Конец решения.

1. Доказать, что гомеоморфны внутренность круга и множество всех точек декартовой плоскости.

2. Показать, что отрезок и интервал не гомеоморфны.

Критерии оценивания:

- оценка «отлично» выставляется, если безошибочно выполнены все задания;
- оценка «хорошо» выставляется, если выполнены все задания, но допущены ошибки, не влияющие на ход и смысл их решения;
- оценка «удовлетворительно» выставляется, если выполнено правильно хотя бы одно задание работы;
- оценка «неудовлетворительно» выставляется, если не выполнено правильно ни одного задания.

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

8.1. Основная литература:

1. Мищенко, А. С. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии / А.С. Мищенко, А.Т. Фоменко. - Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 304 с. (Классический университетский учебник) ISBN 5-9221-0442-X. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/544615> (дата обращения: 30.07.2020). – Режим доступа: по подписке.
2. Шелепин, А. Л. Дифференциальная геометрия : учебное пособие / А. Л. Шелепин. — Москва : РТУ МИРЭА, 2024. — 98 с. — ISBN 978-5-7339-2108-2. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/405164> (дата обращения: 11.07.2024). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Розендорн, Э. Р. Задачи по дифференциальной геометрии / Э. Р. Розендорн. - 3-е изд., испр. и доп. - Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2008. - 144 с. - ISBN 978-5-9221-0821-8. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/544679> (дата обращения: 30.07.2020). – Режим доступа: по подписке.
4. Нагребецкая, Ю. В. Дифференциальная геометрия : практикум / Ю. В. Нагребецкая, О. Е. Перминова ; науч. ред. М. В. Волков ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Урал. федер. ун-т. - Екатеринбург : Изд-во Уральского ун-та, 2017. - 72 с. - ISBN 978-5-7996-2062-2. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1957518> (дата обращения: 11.07.2024). – Режим доступа: по подписке.
5. Обуховский, В. В. Элементы топологии : учебное пособие / В. В. Обуховский, Г. Г. Петросян. — Воронеж : ВГПУ, 2022. — 40 с. — ISBN 978-5-00044-937-0. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/340214> (дата обращения: 11.07.2024). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

8.2. Дополнительная литература:

1. Игнаточкина, Л. А. Топология для бакалавров математики : учебное пособие / Л. А. Игнаточкина. - Москва: Прометей, 2016. - 88 с. - ISBN 978-5-9907453-1-5. - URL:

- <https://znanium.com/catalog/product/557085> (дата обращения: 20.08.2020). – Режим доступа: по подписке.
2. Федорчук, В. В. Общая топология. Основные конструкции: учебное пособие / В. В. Федорчук, В. В. Филиппов. - 2-е изд., испр. и доп. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2006. - 336 с. - ISBN 5-9221-0618-X. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/544634> (дата обращения: 20.08.2020). – Режим доступа: по подписке.

9. Требования к условиям (модуля реализации рабочей программы дисциплины)

9.1. Общесистемные требования

Электронная информационно-образовательная среда ФГБОУ ВО «КЧГУ»

Каждый обучающийся в течение всего периода обучения обеспечен индивидуальным неограниченным доступом к электронной информационно-образовательной среде (ЭИОС) Университета из любой точки, в которой имеется доступ к информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», как на территории Университета, так и вне ее.

Функционирование ЭИОС обеспечивается соответствующими средствами информационно-коммуникационных технологий и квалификацией работников, ее использующих и поддерживающих. Функционирование ЭИОС соответствует законодательству Российской Федерации.

Адрес официального сайта университета: <http://kchgu.ru>.

Адрес размещения ЭИОС ФГБОУ ВО «КЧГУ»: <https://do.kchgu.ru>.

Электронно-библиотечные системы (электронные библиотеки)

Учебный год	Наименование документа с указанием реквизитов	Срок действия документа
2025-2026 учебный год	Электронно-библиотечная система ООО «Знаниум». Договор № 249 эбс от 14.05.2025 г. Электронный адрес: https://znanium.com	от 14.05.2025г. до 14.05.2026г.
2025-2026 учебный год	Электронно-библиотечная система «Лань». Договор № 10 от 11.02.2025 г. Электронный адрес: https://e.lanbook.com	от 11.02.2025г. до 11.02.2026г.
2025-2026 учебный год	Электронно-библиотечная система КЧГУ. Положение об ЭБ утверждено Ученым советом от 30.09.2015г. Протокол № 1. Электронный адрес: http://lib.kchgu.ru	Бессрочный
2025-2026 учебный год	Национальная электронная библиотека (НЭБ). Договор №101/НЭБ/1391-п от 22.02.2023 г. Электронный адрес: http://rusneb.ru	Бессрочный
2025-2026 учебный год	Научная электронная библиотека «ELIBRARY.RU». Лицензионное соглашение №15646 от 21.10.2016 г. Электронный адрес: http://elibrary.ru	Бессрочный
2025-2026 учебный год	Электронный ресурс Polpred.comОбзор СМИ. Соглашение. Бесплатно. Электронный адрес: http://polpred.com	Бессрочный

9.2. Материально-техническое и учебно-методическое обеспечение дисциплины

Занятия проводятся в учебных аудиториях, предназначенных для проведения занятий лекционного и практического типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации в соответствии с расписанием занятий по образовательной программе. С описанием оснащенности аудиторий можно ознакомиться на сайте университета, в разделе материально-технического обеспечения и оснащенности образовательного процесса по адресу: <https://kchgu.ru/sveden/objects/>

9.3. Необходимый комплекс лицензионного программного обеспечения

- Microsoft Windows (Лицензия № 60290784), бессрочная
- Microsoft Office (Лицензия № 60127446), бессрочная
- ABBY FineReader (лицензия № FCRP-1100-1002-3937), бессрочная
- CalculateLinux (внесён в ЕРРП Приказом Минкомсвязи №665 от 30.11.2018-2020), бессрочная
- Google G Suite for Education (IC: 01i1p5u8), бессрочная
 - Kaspersky Endpoint Security. Договор №0379400000325000001/1 от 28.02.2025г. Срок действия лицензии с 27.02.2025г. по 07.03.2027г.

9.4. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

1. Федеральный портал «Российское образование» - <https://edu.ru/documents/>
2. Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов (Единая коллекция ЦОР) – <http://school-collection.edu.ru/>
3. Базы данных Scopus издательства Elsevier <http://www.scopus.com/search/form.uri?display=basic>.
4. Портал Федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования - <http://fgosvo.ru>.
5. Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов (ФЦИОР) – <http://edu.ru>.
6. Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов (Единая коллекция ЦОР) – <http://school-collection.edu.ru>.
7. Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам» (ИС «Единое окно») – <http://window.edu.ru>.
- 8.

10. Особенности организации образовательного процесса для лиц с ограниченными возможностями здоровья

В ФГБОУ ВО «Карачаево-Черкесский государственный университет имени У.Д. Алиева» созданы условия для получения высшего образования по образовательным программам обучающихся с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ).

Специальные условия для получения образования по ОПВО обучающимися с ограниченными возможностями здоровья определены «[Положением об обучении лиц с ОВЗ в КЧГУ](#)», размещенным на сайте Университета по адресу: <http://kchgu.ru>.

11. Лист регистрации изменений

В рабочей программе внесены следующие изменения:

Изменение	Дата и номер ученого совета факультета/института, на котором были рассмотрены вопросы о необходимости внесения изменений	Дата и номер протокола ученого совета Университета, на котором были утверждены изменения	Дата введения изменений